Eine Verallgemeinerung des spektralen Abbildungssatzes in topologischen Algebren

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Konrad Schellenberg
aus Konstanz, Kreis Konstanz

1969

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547603_0093

Eine Verallgemeinerung des spektralen Abbildungssatzes in topologischen Algebren

DISSERTATION
zur Erlangung des Grades eines Doktors
der Naturwissenschaften
der Mathematisch-naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen

vorgelegt von
Konrad Schellenberg
aus Konstanz, Kreis Konstanz

1969

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung:	3. Juli 1969
Dekan:	Prof. Dr. A. Seilacher
1. Berichterstatter:	Prof. Dr. H. H. Schaefer
2. Berichterstatter:	Prof. Dr. R. G. Bartle

Vorwort.

Ziel der vorliegenden Arbeit ist eine Ausdehnung des Funktionenkalküls auf allgemeinere Funktionen, als solche, die in einer Umgebung des Spektrums eines Elementes A einer geeigneten Algebra holomorph sind.

Die hier bewiesenen Sätze sind meistens folgender Art. Gilt der spektrale Abbildungssatz für eine Folge von Funktionen f_n und existiert ein S, mit allen $f_n(A)$ vertauschbar und $\lim_{n \to \infty} R(S - f_n(A)) = 0$, so gilt Sp S = f(Sp A). Dabei wird entweder vorausgesetzt, daß die f_n gleichmäßig gegen f konvergieren, oder aber die gleichmäßige Konvergenz wird aus anderen Bedingungen erschlossen.

Die Voraussetzung $\lim_{n \to \infty} R(S - f_n(A)) = 0$ erweist sich in folgendem Sinne als notwendig. Wenn S und die $f_n(A)$ einer kommutativen Teilalgebra angehören, deren sämtliche Elemente den spektralen Abbildungssatz erfüllen, dann folgt aus der gleichmäßigen Konvergenz der f_n auch die obige Limesrelation für R.

Es gibt mehrere Gründe zu dieser Verallgemeinerung des spektralen Abbildungssatzes.

E. Scheffold bewies folgendes Theorem: Ist X ein uniformisierbarer Raum, $C_{\mathfrak{C}}(X)$ der Raum der stetigen, beschränkten, komplexwertigen Funktionen auf X, T ein Verbandsisomorphismus in $C_{\mathfrak{C}}(X)$ und $\mathfrak{A}$ die von I, T und T^{-1} erzeugte, abgeschlossene Teilalgebra von $\mathfrak{L}(C_{\mathfrak{C}}(X))$ so ist diese algebraisch-, verbands-, und normisomorph zur Gruppenalgebra $\ell^1(Z)$. Vermöge der Charakterisierung der maximalen Ideale in diesen Algebren ergibt sich: Sp S = f_S(Sp T), wobei S ein beliebiges Element aus $\mathfrak{A}$ und f_S das assoziierte Element in $\ell^1(Z)$ bedeuten.

A. E. Taylor ([17], p. 304, ex. 4) formulierte die Gültigkeit des spektralen Abbildungssatzes für den folgenden Fall: T sei der unilaterale Shift nach rechts in l^p, $p > 1$ und $f(T) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu T^\nu$ $(\alpha_\nu) \in l^1$.

Der dortige Sachverhalt läßt folgende Verallgemeinerung zu. Ist E ein Banachraum und $\mathfrak{L}(E)$ die Banachalgebra der stetigen, linearen Operatoren von E in sich, $\{T^n\}$ eine gleichstetige Folge aus $\mathfrak{L}(E)$, so gilt der spektrale Abbildungssatz $\mathrm{Sp}\, f(T) = f(\mathrm{Sp}\, T)$, wobei $f(\lambda) := \sum_{\nu=0}^{\infty} \alpha_\nu \lambda^\nu$, $(\alpha_\nu) \in l^1$.

Hiervon ausgehend ergibt sich folgende Frage: Gilt der spektrale Abbildungssatz für Elemente S einer Banachalgebra $\mathfrak{A}$ mit e, die sich als Normlimites einer Folge $f_n(A)$ darstellen lassen, wobei die f_n in einer geeigneten Umgebung U_n des Spektrums von A holomorph sind? Die Frage ist zu bejahen. Die Gültigkeit des spektralen Abbildungssatzes folgt aus dem Theorem 2.1, bezw. 3.1, sofern man die Gelfandtheorie heranziehen will.

Im 0. Kapitel werden die wichtigsten Begriffe aus Algebra, Topologie und Spektraltheorie zusammengestellt, bezw. auf die einschlägige Literatur verwiesen. Es folgen einige Bemerkungen über die historische Entwicklung des Funktionenkalküls in Banachalgebren. Auf spezielle Operatoren, etwa die Spektraloperatoren, wird in dieser Arbeit nicht eingegangen.

In Kapitel 1 werden drei Sätze angegeben, die bereits eine Verallgemeinerung des spektralen Abbildungssatzes zum Ziel haben.

Die Sätze 1.1 bis 1.3 gelten in beliebigen Algebren über $\mathbb{C}$.
Die Annahme, daß der zugrunde liegende Grundkörper aus den komplexen Zahlen besteht, ist letztlich eine Routinevoraussetzung, die in der klassischen Spektraltheorie üblich ist, sie ist nicht etwa strukturell bedingt. Ebensogut könnte man für K einen evtl. nicht diskret bewerteten Körper heranziehen.
In Kap. 1 werden keinerlei Voraussetzungen an eine etwaige topologische Struktur von $\mathfrak{A}$ gemacht. Es handelt sich in diesen Sätzen letztlich nur um Konvergenzaussagen in $\mathbb{C}$, bezw. in allgemeinen metrischen Räumen. Diese Einsicht erweist sich in 4.6 als vorteilhaft.
Schließlich werden im ersten Kapitel auch keine Kommutativitätsforderungen gestellt. Für eine " nichtkommutative Spektraltheorie " dürfte daher 1.3 ebenfalls von Interesse sein.

Im 2. Kapitel wird zunächst der Begriff der Algebra vom Typ R definiert, danach eine Verallgemeinerung des spektralen Abbildungssatzes in mehreren Einzelschritten bewiesen. Nirgends wird vorausgesetzt, daß die entsprechenden Funktionen f_n stetig zu sein brauchen. Dieser Satz ergibt in speziellen Algebren interessante Anwendungsmöglichkeiten, z. B. normale Operatoren in Hilberträumen, bezw. allgemeiner Spektraloperatoren in lokalkonvexen Algebren, c. H. H. Schaefer(14), (15).
Jede Banachalgebra ist R - Algebra, dies folgt aus $R(A) = \lim_{n \to \infty} \| A^n \|^{\frac{1}{n}}$
Diese Beziehung kann elementar, d.h. ohne Zuhilfenahme der Dualitäts, bezw. der Gelfandtheorie bewiesen werden.
In B - Algebren gilt stets $R(A) \leq \| A \|$. Aus der Gültigkeit des spektralen Abbildungssatzes für Funktionen $f(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha_\nu}{\eta_\nu - \lambda}$, $\eta_\nu \notin Sp\ A$, folgt aus 2. 1 zunächst das Bestehen desselben für Funktionen, die in einer Umgebung des Spektrums von A holomorph sind, darüber

gilt Sp S = f(Sp A), falls S = lim $f_n(A)$, f_n in Umgebung U_n von Sp A holomorph. f ist dabei der existierende gleichmäßige Limes der f_n.

Im Allgemeinen besteht kein einfacher Zusammenhang zwischen den Bedingungen $f_n(A)$ konvergiert gegen S und $\lim_{n\to\infty} R(S - f_n(A)) = o$. Vgl. hierzu das Bsp. auf Seite 43.
In einer umfangreichen Klasse von Algebren, den G-Algebren, gilt jedoch für eine spezielle Funktionenklasse $\mathcal{F}$ folgendes Theorem: Ist S = lim $f_n(A)$, $f_n \in \mathcal{F}$, dann konvergiert die Folge $f_n(\lambda)$ punktweise gegen $f(\lambda)$, und es gilt Sp S = f(Sp A).
$\mathcal{F}$ enthält alle rationalen Funktionen, deren Polstellen außerhalb Sp A liegen. Allgemeiner gilt: $f \in \mathcal{F}$, falls f in einer geeigneten Umgebung U von Sp A holomorph ist und das Cauchyintegral $f(A) := \int_\Gamma f(\lambda)(\lambda - A)^{-1} d\lambda$ existiert.
Die G-Algebren werden in § 3 eingeführt. Es werden einige Beispiele angegeben. Jede G-Algebra ist vom Typ R.

Im 4. Kapitel wird das Waelbroeckspektrum eingeführt. Während in Banachalgebren das Spektrum stets mit dem Waelbroeckspektrum übereinstimmt, braucht dies selbst in vollständigen, lokal m-konvexen Algebren nicht der Fall zu sein.
Falls in A das Produkt zweier beschränkter Mengen beschränkt ist, gilt der spektrale Abbildungssatz für folgende Funktionenklassen: Für Polynome, bezw. allgemeiner für rationale Funktionen, sofern die Polstellen außerhalb des Spektrums liegen.

Ziel dieses Abschnitts ist ein spektraler Abbildungssatz, analog zu Theorem 2.1, für das Waelbroeckspektrum. Das Theorem 4.7 ermöglicht diesem Ziel, weitgehend Rechnung zu tragen. Die $f_n(A)$ werden als regulär vorausgesetzt. Die Conditio, sine qua non, lautet jetzt natürlich $\lim_{n\to\infty} R_{f_n(A)}(S - f_n(A)) = o$. Die zugrunde gelegte Algebra ist dabei vom Typ R_w. Jede folgenvollständige, lokalkonvexe Algebra mit e ist eine solche, G. Neubauer (10).

Auf die Regularität der $f_n(A)$ kann unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen verzichtet werden. Im 5. Kapitel wird dieser Frage nachgegangen. Eine neue Klasse von Algebren, die D - Algebren werden eingeführt. In diesen Dorisalgebren gilt ein dem Theorem 4.7 entsprechendes Theorem für beliebige $f_n(A)$.

Für die Aussagen des 4. und 5. Kapitels gelten wiederum die bereits zu 1 gemachten Bemerkungen. Die Prop. 4.6 dürfte sich für eine weitere Erforschung des spektralen Abbildungssatzes in zweifacher Hinsicht nützlich erweisen:

1) Die Vertauschbarkeit der $f_n(A)$ mit S ist in manchen Fällen sicher entbehrlich.

2) Die Limesrelation für R_{f_n} kann in geeigneten Fällen sicher durch die Forderung, $f_n(\lambda)$ konvergiert gegen S, ersetzt werden. Es müssen ja nur die beiden Voraussetzungen 3a und 3b von 4.6 erfüllt werden.

Damit wäre der Anschluß an die Spektraltheorie von G. Neubauer (10, bes. Kap. 6), dessen Ergebnisse unter Verwendung ganz anderer Hilfsmittel gewonnen werden, wieder hergestellt.

Im 6. Kapitel werden zwei Anwendungen des spektralen Abbildungssatzes gegeben. Die eine betrifft eine leichte Verallgemeinerung des auf Seite 2 angegebenen Sachverhalts, die Gleichstetigkeit der Potenzen von A betreffend, die andere befaßt sich mit einem spektralen Abbildungssatz für das periphere Spektrum unter geeigneten Zusatzvoraussetzungen.
Das Th. 6.2 war ein wesentlicher Beweggrund zur systematischen Untersuchung der Gültigkeit des spektralen Abbildungssatzes.

Das letzte Kapitel hat das Punkt- und das approximative Punktspektrum zum Gegenstand. An einem Beispiel wird gezeigt, daß $P_\sigma(S) = f(P_\sigma(T))$ nicht zu gelten braucht.
Ferner wird gezeigt, daß der spektrale Abbildungssatz nicht zu gelten braucht, wenn die $f_n(A)$ im Sinne der starken Operatortopologie gegen S konvergieren und $Sp\, f_n(A) = f_n(Sp\, A)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Offen ist auch noch folgende Frage: Sei E ein Banachraum, $\mathcal{L}(E)$ die B - Algebra der stetigen, linearen Operatoren von E in sich. $f_n(A)$ konvergiere gegen S, und es gelte $\sigma_a(f_n(A)) = f_n(\sigma_a(A))$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Gilt dann $\sigma_a(S) = f(\sigma_a(A))$, wobei $f = \lim_{n\to\infty} f_n$?
Das Einbettungstheorem (8 , 2.4) von H. Lotz könnte sich zur Beantwortung dieser Frage als bedeutungsvoll erweisen.

Herrn Prof. Dr. Helmut H. Schaefer möchte ich für das Interesse an dieser Arbeit, besonders aber für die sachliche Kritik zu einigen Einzelfragen, herzlich danken.

0. Hilfsmittel aus Algebra, Spektraltheorie und Topologie.

Definition und wichtigste Eigenschaften von Algebren, Idealen und Homomorphismen findet man bei M. A. Neumark (12).
In dieser Arbeit wird stets vorausgesetzt, daß $\mathfrak{A}$ eine Algebra über dem Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist.

Zu jeder Algebra $\mathfrak{A}$ ohne Einselement e gibt es eine kleinste Algebra $\mathfrak{A}_e$ mit e, die $\mathfrak{A}$ enthält. Man erhält $\mathfrak{A}_e$, indem man im kartesischen Produkt $\mathfrak{A} \times \mathbb{C}$ die Multiplikation zweier Elemente wie folgt definiert:

$$(A, \lambda)\cdot(B, \mu) := (AB + \mu A + \lambda B, \lambda\mu)$$

Ein Element $A \in \mathfrak{A}$ heiße quasiinvertierbar, falls $e + A$ in $\mathfrak{A}_e$ invertierbar ist. A ist somit genau dann quasiinvertierbar, falls ein $B \in \mathfrak{A}$ existiert, sodaß $A + B + AB = 0 = A + B + BA$. B ist eindeutig bestimmt.

Das Spektrum von $\mathfrak{A}$ besteht aus denjenigen $\lambda \in \mathbb{C}$, sodaß $\lambda - A$ in $\mathfrak{A}_e$ keine Inverse besitzt. In einer Algebra ohne Einselement e ist stets $0 \in \mathrm{Sp}\, A$. Ein $\lambda = 0$ liegt somit genau dann im Spektrum von A, wenn $-\frac{A}{\lambda}$ nicht quasiinvertierbar ist.
In dieser Arbeit wird stets vorausgesetzt, daß die Spektren der entsprechenden Elemente nicht leer sind.
Der Spektralradius $R(A)$ von $A \in \mathfrak{A}$ ist durch $R(A) := \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A} |\lambda|$ definiert.

Das periphere Spektrum eines Elementes A mit $R(A) < \infty$ besteht per Definitionem aus allen $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$ mit $|\lambda| = R(A)$.

Zwischen Ideal- und Spektraltheorie einer Algebra mit Einselement e besteht folgender Zusammenhang.
Ein Element $A \in \mathfrak{A}$ ist genau dann invertierbar in $\mathfrak{A}$, wenn weder ein Rechts-, noch ein Linksideal existiert, dem A angehört. Dabei werden die Ideale in der Spektraltheorie stets als von $\mathfrak{A}$ verschieden vorausgesetzt.

Eine Anwendung des Lemmas von Zorn ergibt: A ist in $\mathfrak{A}$ genau dann invertierbar, wenn kein maximales, zweiseitiges Ideal existiert, dem A angehört. Daraus folgt, $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$ genau dann, wenn mindestens ein maximales, zweiseitiges Ideal $\mathfrak{J}_\lambda$ existiert mit $\lambda - A \in \mathfrak{J}_\lambda$.

In einer Algebra ist das Produkt zweier vertauschbarer Elemente genau dann invertierbar, wenn beide Faktoren invertierbar sind.

Die Charakterisierung des Spektrums durch die maximalen Ideale wird in § 3 wieder aufgegriffen.

Eine von der obigen Definition abweichende Definition des Spektrums wird in § 4 gegeben.

In Operatoralgebren $\mathfrak{L}(E)$ erweist sich eine weitere Aufteilung des Spektrums als nützlich, vgl. die Bemerkungen auf Seite 13.

Der spektrale Abbildungssatz.

$\mathfrak{A}$ sei eine Algebra, $A \in \mathfrak{A}$, $\mathcal{F}$ eine Menge komplexwertiger Funktionen auf Sp A und φ eine Abbildung von $\mathcal{F}$ in $\mathfrak{A}$. Es wird $f(A) := \varphi(f)$ gesetzt.

Es stellt sich die Frage, unter welchen Voraussetzungen die Mengen Sp f(A) und f(Sp A) übereinstimmen.

Allgemeiner: Wann gilt $\overline{\text{Sp } f(A)} = \overline{f(\text{Sp } A)}$?

Ist $\mathfrak{A}$ eine Algebra mit Einselement, so gilt der spektrale Abbildungssatz für jedes Polynom f. Dies folgt aus der Faktorzerlegung eines Polynoms und der Tatsache, daß ein endliches Produkt vertauschbarer Elemente genau dann invertierbar ist, wenn es jeder Faktor ist.

In einer Algebra mit e gilt der spektrale Abbildungssatz ferner für alle f, $f(\lambda) := \frac{\wedge}{\lambda - \lambda_0}$, $\lambda_0 \notin \text{Sp } A$, damit auch für alle Ausdrücke $f(\lambda) := \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\eta_\nu}{\lambda - \lambda_\nu}$, $\lambda_\nu \notin \text{Sp } A$.

In einer Algebra ohne e gilt der spektrale Abbildungssatz für jedes Polynom ohne konstanten Term.

Die topologischen Vektorräume werden ausführlich bei N. Bourbaki ( ), G. Köthe (7), bezw. H. H. Schaefer (16) behandelt.
Für die geordneten Vektorräume sei auf H. H. Schaefer (16) und die dort zitierte Literatur verwiesen.

Topologische Algebren. Eine Algebra $\mathfrak{A}$ heiße topologische Algebra, falls der zugrunde liegende Vektorraum $\mathfrak{A}_0$ ein topologischer Vektorraum ist und überdies für jedes $A \in \mathfrak{A}$ die Abbildungen $X \to AX$ und $X \to XA$ steig sind.

$\mathfrak{A}$ heiße topologische Algebra mit stetiger Quasiinversion, falls $\mathfrak{A}$ eine topologische Algebra ist und die Abbildung $A \to A_q$ auf der Menge der quasiinvertierbaren Elemente stetig ist, dabei ist A_q die Quasiinverse.

Eine topologische Algebra heiße Q - Algebra, falls die Menge der quasiinvertierbaren Elemente offen ist.

Eine Algebra mit stetigen Quasiinversen ist eine Q - Algebra mit stetiger Quasiinversion.

$\mathfrak{A}$ heiße lokalkonvexe Algebra, falls $\mathfrak{A}$ eine topologische Algebra ist und zusätzlich gefordert wird, daß der zugrunde liegende Vektorraum $\mathfrak{A}_0$ ein lokalkonvexer Vektorraum ist.

$\mathfrak{A}$ heiße lokal m- konvex, falls $\mathfrak{A}$ eine lokalkonvexe Algebra ist und eine Nullumgebungsbasis aus konvexen, idempotenten Mengen besitzt, dabei heißt U idempotent, falls $UU \subseteq U$.
Gleichwertig damit ist die Forderung, es existiert ein die Topologie erzeugendes System von Halbnormen $\{ p_\lambda , \lambda \in L \}$ mit $p_\lambda(AB) \leq p_\lambda(A) p_\lambda(B)$ für alle $A , B \in \mathfrak{A} , \lambda \in L$.

$\mathfrak{A}$ heiße Banachalgebra, falls $\mathfrak{A}_c$ ein Banachraum ist und für beliebiges A, B$\in\mathfrak{A}$ $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$ gilt. Besitzt $\mathfrak{A}$ ein Einselement, so existiert eine äquivalente Norm, sodaß $\|e\| = 1$.
Jede Banachalgebra ist Algebra mit stetigen Quasiinversen, bezw. Algebra mit stetigen Inversen, falls $e\in\mathfrak{A}$.

Topologische Adjunktion des Einselementes. Versieht man $\mathfrak{A}_e = \mathfrak{A} \times \mathbb{C}$ mit der Produkttopologie, so erweisen sich die Eigenschaften: topologische Algebra, lokalkonvexe, bezw. lokal m-konvexe Algebra als permanent. Ebenso übertragen sich die Eigenschaften: Algebra mit stetiger Quasiinversion, bezw. Q - Algebra von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{A}_e$. Mit $\mathfrak{A}$ ist auch $\mathfrak{A}_e$ eine Banachalgebra.

Topologische Algebren, sowie die oben definierten Spezialfälle hiervon, wurden von R. Arens und I. Kaplansky systematisch untersucht, cf. I. Kaplansky (6) und die dort zitierte Literatur.
Lokal m-konvexe Algebren und ihre Spektraltheorie wurden von E. A. Michael (9) ausführlich behandelt.
I. M. Gelfand, D. A. Raikow, G. E. Schilow entwickelten in zahlreichen Arbeiten die Theorie der kommutativen Banachalgebren und ihre Spektraltheorie, vgl. Vorwort und Lit. Verzeichnis bei M. A. Neumark (12).

Operatoralgebren. Ist E ein Banachraum, $\mathfrak{L}(E)$ die Algebra der stetigen, linearen Abbildungen (Operatoren) von E in sich, so wird $\mathfrak{L}(E)$ eine Banachalgebra mit Einselement, wenn für $T \in \mathfrak{L}(E)$

$\|T\| := \sup_{\|x\| \leq 1} \|Tx\|$ gesetzt wird.

Allgemeiner gilt folgender Sachverhalt, cf. H. H. Schaefer (16 , p.202, ex. 40):

Sei E ein lokalkonvexer Vektorraum, $\mathfrak{S}$ eine totale Familie beschränkter Teilmengen von E, sodaß für jedes $u \in \mathcal{L}(E)$ und jedes $S \in \mathfrak{S}$ $u(S) \in \mathfrak{S}$, dann ist $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E)$ eine lokalkonvexe Algebra.

Ist E tonneliert, quasivollstandig und $\mathfrak{S}$ eine Überdeckung von E, dann ist $\mathcal{L}_{\mathfrak{S}}(E)$ quasivollständig. Dies folgt aus (16, III Th. 4.2, 4.4 und Cor. zu 4.4).

Spektraltheorie in lokalkonvexen Algebren.

In einer lokalkonvexen Algebra mit stetiger Quasiinversion ist das Spektrum eines Elementes niemals leer, I. Kaplansky (6).

In einer lokalkonvexen Q - Algebra ist das Spektrum eines Elementes stets kompakt.

In einer Banachalgebra hat also jedes Element ein nicht leeres, kompaktes Spektrum, mindestens ein Element des Spektrums liegt im peripheren Spektrum.

Allgemeiner gilt dies für beliebige lokalkonvexe Algebren, deren maximale kommutative Teilalgebren Algebren mit stetigen Quasiinversen sind, vgl. die Def. aus Seite 10.

Selbst in kommutativen, vollständigen, lokal m-konvexen Algebren, die a priori Algebren mit stetiger Quasiinversion sind, kann man über die Verteilung von Sp A in $\mathbb{C}$ im Allgemeinen keine weiteren Aussagen machen. Dies liegt teilweise daran, daß diese Algebren keine Q - Algebren zu sein brauchen.

E. A. Michael (9, § 13) beschäftigt sich ausführlich mit dieser Frage.

Spektraltheorie in der Banachalgebra $\mathcal{L}(E)$.

Das Spektrum der Elemente $T \in \mathcal{L}(E)$ gestattet die Aufteilund in Punkt-, kontinuierliches- und Residualspektrum. Definition und Eigenschaften dieser Mengen findet man bei A. E. Taylor (17), N. Dunford - J. T. Schwartz (2), bezw. bei E. Hille - R. Phillips (5). Eine Verallgemeinerung dieser Ideen auf beliebige stetige, lineare Operatoren $T : X \to Y$, X und Y normierte Räume, gibt A. E. Taylor - J. A. Halberg (18), cf. (17, § 4.7.1, p. 235 ff)

Das approximative Punktspektrum eines $T \in \mathcal{L}(E)$ besteht aus denjenigen $\lambda \in \mathrm{Sp}\ T$, zu denen es eine Folge $x_n \in E$, $\|x_n\| = 1$, gibt, sodaß $\|(\lambda - T)x_n\|$ gegen o konvergiert.
Der Satz vom abgeschlossenen Graphen ermöglicht folgende Aussage.
λ ist genau dann Element des approximativen Punktspektrums, wenn $\lambda - T$ kein topologischer Isomorphismus von E in E ist.
Das approximative Punktspektrum $\sigma_a(T)$ ist abgeschlossener, also kompakter Teil von Sp T.
Es gilt $P_\sigma(T) \cup C_\sigma(T) \subseteq \sigma_a(T)$, $\mathrm{Sp}\ T = \sigma_a(T) \cup P_\sigma(T')$.

Das Spektrum positiver Operatoren in Banachverbänden wurde von H. H. Schaefer eingehend untersucht, vg. (16, appendix) und die dort angegebene Lit.
Das approximative Punktspektrum positiver Operatoren ist Gegenstand der Diss. von H. Lotz (8). Vermöge des Einbettungssatzes von H. Lotz (8, § 2) lassen sich viele Fragen über das $\sigma_a(T)$ auf solche über das Punktspektrum zurückführen.
M. Wolff (21) beschäftigt sich in seiner Diss. ausführlich mit dem Spektrum von Verbandshomomorphismen in Banachverbänden.

1. Eine Verallgemeinerung des spektralen Abbildungssatzes.

Von zentraler Bedeutung erweisen sich die beiden folgenden Propositionen:

Proposition 1. Es sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige Algebra, $A \in \mathfrak{A}$, $f_n \in \mathfrak{C}^{Sp\,A}$. $f_n(A)$ sei erklärt und in $\mathfrak{A}$. Folgende Voraussetzungen mögen erfüllt sein:

1) Die Folge $f_n(\lambda)$ konvergiere punktweise gegen $f(\lambda)$,

2) für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte $f_n(\mathrm{Sp}\ A) \subseteq \overline{\mathrm{Sp}\ f_n(A)}$.

Es sei $S \in \mathfrak{A}$ mit folgender Eigenschaft:

3a) Zu jeder Folge $\eta = (\eta_n)$, $\eta_n \in \mathrm{Sp}\ f_n(A)$ existiere eine Folge $\nu = (\nu_n)$, $\nu_n \in \overline{\mathrm{Sp}\ S}$ mit $\lim_{n\to\infty} (\eta_n - \nu_n) = 0$,

dann gilt die Inklusion $f(\mathrm{Sp}\ A) \subseteq \overline{\mathrm{Sp}\ S}$.

Beweis:

a) Zu jedem $\mu_n \in \overline{\mathrm{Sp}\ f_n(A)}$ existiert $\eta_n \in \mathrm{Sp}\ f_n(A)$ mit $|\mu_n - \eta_n| \leq \frac{1}{2n}$,

b) Nach Vor. 3a gilt für eine Teilfolge $(\eta_{\varphi(n)})$ die Beziehung $|\eta_{\varphi(n)} - \nu_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{2n}$, wobei o.B.d.A. $\varphi(n) \geq n$ angenommen werden darf.

Aus (a) und (b) folgt $|\mu_{\varphi(n)} - \nu_{\varphi(n)}| \leq \frac{1}{n}$.

Nach Vor. 2 ist $f_n(\lambda) \in \overline{\mathrm{Sp}\ f_n(A)}$. Setze $\mu_n := f_n(\lambda)$. Für eine Teilfolge der $f_n(\lambda)$ gibt es also eine Folge in $\overline{\mathrm{Sp}\ S}$, so daß die Differenz eine Nullfolge ist. Die Teilfolge $f_{\varphi(n)}(\lambda)$ konvergiert ebenfalls gegen $f(\lambda)$, somit gilt auch $f(\lambda) = \lim_{n\to\infty} \nu_{\varphi(n)}$. Da $\overline{\mathrm{Sp}\ S}$ abgeschlossen ist, folgt nun, daß $f(\lambda) \in \overline{\mathrm{Sp}\ S}$. QED.

Proposition 2. Es sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra, $A \in \mathfrak{A}$, $f_n(\lambda) \in \mathfrak{f}^{Sp\,A}$, $f_n(A) \in \mathfrak{A}$, folgende Voraussetzungen seien erfüllt:

1) Die Folge $f_n(\lambda)$ konvergiere gleichmäßig gegen $f(\lambda)$,

2) für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte $Sp\, f_n(A) \subseteq \overline{f_n(Sp\, A)}$.

Es sei $S \in \mathfrak{A}$, dessen Spektrum wie folgt approximierbar sei:

3b) Zu jedem $\eta_0 \in Sp\, S$ existiere eine Folge $\eta = (\eta_n)$, $\eta_n \in \overline{Sp\, f_n(A)}$ mit $\eta_0 = \lim_{n\to\infty} \eta_n$,

dann gilt die Inklusion $Sp\, S \subseteq \overline{f(Sp\, A)}$.

Beweis: Es sei $\eta \in Sp\, S$, nach Vor. 3b gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $\varphi(n)$, so daß für alle $m \geq \varphi(n)$ die Beziehung $|\eta - \eta_m| \leq \frac{1}{4n}$ erfüllt ist, dabei ist $\eta_m \in \overline{Sp\, f_m(A)}$. Wegen Vor. 2 ist $\eta_m \in \overline{f_m(Sp\, A)}$. Somit existieren $\lambda_{m,n} \in Sp\, A$ mit $|\eta_m - f_m(\lambda_{m,n})| \leq \frac{1}{4n}$.

Es besteht also die Ungleichung $|\eta - f_m(\lambda_{m,n})| \leq \frac{1}{2n}$ für $m \geq \varphi(n)$. (a)

Nach Vor. 1 gilt $|f(\lambda) - f_j(\lambda)| \leq \frac{1}{2n}$, sofern nur $j \geq \Psi(n)$ gewählt wird. (b)

Für $\beta(n) = Max\,(\varphi(n), \Psi(n))$ gelten vermöge (a) und (b) die beiden Ungleichungen $|\eta - f_{\beta(n)}(\tilde{\lambda}_n)| \leq \frac{1}{2n}$ und $|f(\tilde{\lambda}_n) - f_{\beta(n)}(\tilde{\lambda}_n)| \leq \frac{1}{2n}$, wobei $\tilde{\lambda}_n := \lambda_{\beta(n),n}$ gesetzt wurde. (c)

Aus (c) folgt $|\eta - f(\tilde{\lambda}_n)| \leq \frac{1}{n}$, also $\eta \in \overline{f(Sp\, A)}$.

Aus den obigen Propositionen 1 und 2 folgt unmittelbar das

Theorem 3. Gegeben sei eine Algebra $\mathfrak{A}$ und eine Folge (f_n), $f_n : \mathbb{C}^{Sp\,A}$, A und $f_n(A) \in \mathfrak{A}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gelte:

1) $f_n(\lambda)$ konvergiere gleichmäßig gegen $f(\lambda)$,

2) $\overline{Sp\ f_n(A)} = \overline{f_n(Sp\ A)}$ füralle $n \in \mathbb{N}$.

Erfüllt das Spektrum eines $S \in \mathfrak{A}$ die Approximationsforderungen 3a aus Prop. 1 und 3b aus Prop. 2, dann gilt der verallgemeinerte spektrale Abbildungssatz $\overline{Sp\ S} = \overline{f(Sp\ A)}$.

2. Algebren vom Typ R.

Definition: Eine Algebra heiße vom Typ R, falls aus $AB = BA$ und $R(A) < \infty$, $R(B) < \infty$ die Relation $R(AB) \leq R(A)R(B)$ folgt.

Theorem 1. $\mathfrak{A}$ sei eine Algebra vom Typ R, $f_n \in \mathfrak{P}^{Sp A}$, A und $f_n(A) \in \mathfrak{A}$.

Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:

a) (1) $f_n(\lambda)$ konvergiere gleichmäßig gegen $f(\lambda)$,

(2) $\overline{f_n(Sp\ A)} = \overline{Sp\ f_n(A)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(3) Es existiere ein $S \in \mathfrak{A}$, mit allen $f_n(A)$ vertauschbar, welches die Relation $\lim_{n \to \infty} R(S - f_n(A)) = 0$ erfüllt.

Unter den obigen Voraussetzungen gilt $\overline{Sp\ S} = \overline{f(Sp\ A)}$.

Falls die $f_n(A)$ eine abelsche Familie bilden und $(f_n - f_m)(Sp\ A) \subseteq \overline{Sp(f_n(A) - f_m(A))}$ für alle m, n gilt, so ist (1) von selbst erfüllt.

b) Die Definition $f(A) := S$ ist im folgenden Sinne gerechtfertigt:

Falls zwei Folgen f^1_n und f^2_n existieren mit

1) f^i_n ist auf Sp A gleichmäßig Cauchysch, $i = 1, 2$

2) für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f^i_n(A)$ kommutiert mit $f^j_m(A)$

3) Die Voraussetzung a (3) gilt für beide Folgen $f^i_n(A)$, $i = 1, 2$

4) für alle $n \in \mathbb{N}$ sei $(f^1_n - f^2_n)(Sp\ A) \subseteq \overline{Sp(f^1_n(A) - f^2_n(A))}$

dann gilt $\lim_{n \to \infty} f^1_n(\lambda) = \lim_{n \to \infty} f^2_n(\lambda)$ für alle $\lambda \in Sp\ A$.

c) Sind S und T vertauschbare Elemente, die mit den $f_n(A)$ kommutieren, so ist $S - T$ quasinilpotent, falls sowohl $\lim_{n \to \infty} R(S - f_n(A)) = 0$ als auch $\lim_{n \to \infty} R(T - f_n(A)) = 0$ gilt.

Der Beweis des Theorems 1 zerfällt in mehrere Einzelschritte.

Lemma. Sei $F \subsetneq \mathbb{C}$, $0 \notin \overline{F}$, dann gilt

$(\overline{F})^{-1} = \overline{F^{-1}}$, falls F beschränkt ist und

$\{0\} \cup (\overline{F})^{-1} = \overline{F^{-1}}$, falls F unbeschränkt ist.

Beweis des Lemmas. Es sei F beschränkt, dann ist die Abbildung $\varphi^{-1}: \frac{1}{\lambda} \to \lambda$ von F^{-1} auf F eineindeutig und stetig, φ ist ebenfalls stetig, da es eine Nullumgebung U gibt, sodaß $U \cap F = \emptyset$, also ein $n_0 \in \mathbb{N}$: $|\lambda| \geq \frac{1}{n_0}$ für alle $\lambda \in F$, φ ist also ein Homöomorphismus.

F sei unbeschränkt, daraus folgt unmittelbar, daß $0 \in \overline{F^{-1}}$.

Sei $z \in (\overline{F})^{-1}$, $z = \frac{1}{\lambda}$, $\lambda \in \overline{F}$. Es existiert eine Folge (λ_n), $\lambda_n \in F$ mit $\lambda = \lim_{n \to \infty} \lambda_n$. Da $|\lambda_n| \geq \frac{1}{n_0}$, folgt unmittelbar die Konvergenz der $\frac{1}{\lambda_n}$ gegen $\frac{1}{\lambda} = z$, d.h. $z \in \overline{F^{-1}}$. Die Inklusion $\subseteq$ ist damit bewiesen.

Zu zeigen ist $\supseteq$. Es sei $z = \lim_{n \to \infty} z_n$, $z_n \in F^{-1}$ und $z \neq 0$ angenommen, dann existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$: $|z|$ und $|z_n| \geq \frac{1}{m_0}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Der Wertebereich der Folge (λ_n), $\lambda_n = \frac{1}{z_n}$ liegt in einer beschränkten Menge M. Die Folge (λ_n) ist Cauchyfolge, da $|z_n| \geq \frac{1}{m_0}$ für alle n. Es sei $\lambda = \lim_{n \to \infty} \lambda_n$ $M \subseteq \overline{F}$. Da $0 \notin \overline{F}$ folgt die Konvergenz der Folge (z_n) gegen $\frac{1}{\lambda} = z$.

Aus diesem Lemma erhält man das folgende.

Lemma . Es sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra, $A \in \mathfrak{A}$ und $0 \notin \overline{\mathrm{Sp}\, A}$, dann gibt es ein $\eta_0 \in \overline{\mathrm{Sp}\, A}$, sodaß $R(A^{-1}) = \frac{1}{\eta_0}$.

Beweis: Mit $F := \mathrm{Sp}\, A$ und der Beziehung $\mathrm{Sp}(A^{-1}) = (\mathrm{Sp}\, A)^{-1}$ erhält man $\overline{\mathrm{Sp}\, A^{-1}} \subseteq (\overline{\mathrm{Sp}\, A})^{-1} \cup \{0\}$. $\mathrm{Sp}\, A^{-1}$ ist wegen der obigen Voraussetzung beschränkt, also $\overline{\mathrm{Sp}\, A^{-1}}$ kompakt. Es gilt:

$R(A^{-1}) = \sup_{\lambda \in \mathrm{Sp}\, A^{-1}} |\lambda| = \sup_{\lambda \in \overline{\mathrm{Sp}\, A^{-1}}} |\lambda| = \max_{\lambda \in \overline{\mathrm{Sp}\, A^{-1}}} |\lambda| = |\lambda_0|$; da $\mathrm{Sp}\, A \neq \emptyset$, folgt $\lambda_0 \neq 0$ und damit die Behauptung $\lambda_0 = \frac{1}{\eta_0}$, $\eta_0 \in \overline{\mathrm{Sp}\, A}$.

Das vorige Lemma gestattet die folgende Verallgemeinerung eines Satzes von A. E. Taylor ([17], ex. 3, p. 304).

Proposition. A und B seien vertauschbare Elemente einer Algebra $\mathfrak{A}$ vom Typ R, dann existiert zu jedem $\lambda \in \mathrm{Sp}\ A$ ein $\mu \in \overline{\mathrm{Sp}\ B}$, so daß $|\lambda - \mu| \leq R(A - B)$.

Beweis: Man kann o.B.d.A. voraussetzen, daß $\mathfrak{A}$ eine 1 besitzt, denn in einer Algebra ohne Einheit ist stets $o \in \mathrm{Sp}$. Für $\lambda = o$ ist $\mu = o$ zu setzen. Die übrigen Elemente des Spektrums stimmen aber mit dem Spektrum des entsprechenden Elementes in der erweiterten Algebra $\mathfrak{A}_e$ überein.

Angenommen, es existiert ein $\lambda_o \in \mathrm{Sp}\ A$ mit $R(A - B) < |\lambda_o - \mu|$ (a)

für alle $\mu \in \overline{\mathrm{Sp}\ B}$, dann ist $\lambda_o \notin \overline{\mathrm{Sp}\ B}$, somit $(\lambda_o - B)^{-1} \in \mathfrak{A}$. Es sei

$C = 1 - (\lambda_o - A)(\lambda_o - B)^{-1} = (A - B)(\lambda_o - B)^{-1}$

$R(C) \leq R(A - B)R((\lambda_o - B)^{-1}) = R(A - B)|\lambda_o - \mu_o|^{-1}$, $\mu_o \in \overline{\mathrm{Sp}\ B}$ (b)

(b) folgt durch Anwendung des obigen Lemmas auf das Element $\lambda_o - B$. Aus (a) und (b) erhält man jedoch $R(C) < 1$ und damit die Invertierbarkeit von $(\lambda_o - A)(\lambda_o - B)^{-1}$, also auch die Invertierbarkeit von $\lambda_o - A$. Das ist ein Widerspruch zur Annahme $\lambda_o \in \mathrm{Sp}\ A$.

Beweis des Theorems 1. Zu verifizieren sind lediglich die Approximationsforderungen 3a, bezw. 3b der Prop 1.1, bezw. 1.2.
Aus der obigen Proposition folgt 3a, indem sie auf die Elemente $f_n(A)$ und S angewendet wird, 3b folgt durch Vertauschung der Rollen von $f_n(A)$ und S.

Beweis der restlichen Aussagen des Theorems 1.

Für vertauschbare Elemente A und B einer Algebra vom Typ R gilt die Relation $R(A + B) \leq R(A) + R(B)$.

Dies folgt aus der obigen Proposition, indem sie auf die Elemente A + B und A angewendet wird, zu berücksichtigen ist dabei, daß $R(A) = \sup_{\lambda \in Sp A} |\lambda| = \sup_{\lambda \in \overline{Sp A}} |\lambda|$.

Aus $(f_n - f_m)(Sp\ A) \subseteq Sp\ (f_n(A) - f_m(A))$, $R(S - f_n(A)) \to 0$,

und der Kommutativität der Differenzen $S - f_n(A)$ folgt unmittelbar:

$|f_n(\lambda) - f_m(\lambda)| \leq R(f_n(A) - f_m(A)) \leq R(S - f_n(A)) + R(S - f_m(A)) \leq \varepsilon$,

sofern nur $\varepsilon > 0$ so gewählt wird, daß für alle $m, n \geq n_0(\varepsilon)$ $R(S - f_n(A)) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Die Folge $f_n(\lambda)$ ist also auf dem Spektrum gleichmäßig Cauchysch, also auch gleichmäßig konvergent gegen eine Grenzfunktion $f(\lambda)$.

Ebenso beweist man, daß unter den Voraussetzungen des Th. 1, b die Folge $f_n^1(\lambda) - f_n^2(\lambda)$ gleichmäßig gegen o konvergiert und damit auch $\lim f_n^1(\lambda) = \lim f_n^2(\lambda)$ gilt.

Da $S - f_n(A)$ mit $T - f_n(A)$ kommutiert, ist auch $R(S - T) = o$.

Dies folgt ebenfalls aus der Dreiecksungleichung für die Spektralradien.

3. Gelfandalgebren.

Definition: Eine topologische Algebra heiße Gelfandalgebra, falls für jedes $A \in \mathfrak{A}$ $\operatorname{Sp} A = \{f(A),\ f \in \Phi\}$ (G)
Dabei ist Φ die Menge aller stetigen Homomorphismen von $\mathfrak{A}$ in $\mathbb{C}$ die auf e nicht verschwinden, falls $e \in \mathfrak{A}$.

Eine Algebra $\mathfrak{A}$ heiße G'- Algebra, falls für jedes $A \in \mathfrak{A}$
$\operatorname{Sp} A = \{f(A),\ f \in \Psi\}$. (G')
Ψ ist dabei die Gesamtheit aller Homomorphismen von $\mathfrak{A}$ in $\mathbb{C}$, die auf e nicht verschwinden, falls $e \in \mathfrak{A}$.

Beispiele: Die Charakterisierung des Spektrums eines Elementes A einer kommutativen Banachalgebra vermöge (G) stammt von I. Gelfand (3).
Allgemeiner gilt: Jede kommutative, lokalkonvexe Algebra mit stetigen Inversen ist G-Algebra, A. Guichardet (23, p.168).
L. Waelbroeck (19) bewies dieses Theorem unter der Voraussetzung der Vollständigkeit von $\mathfrak{A}$.
E. A. Michael (9, Th. 5.6) zeigt, daß jede kommutative, vollständige, lokal m-konvexe Algebra eine G-Algebra ist.

Eine nicht notwendigerweise kommutative Banachalgebra heißt nach E. Hille - R. S. Phillips (5) zweiseitig, falls jedes Ideal zweiseitig ist. Jede zweiseitige Banachalgebra ist G-Algebra, (5, 24.9.9).

Eine ausführliche Diskussion der nicht notwendigerweise kommutativen G- , bezw. G'- Algebren gibt G. Neubauer (11).
Besonders hervorgehoben sei folgendes Strukturtheorem, das eine Verallgemeinerung des Satzes von E. A. Michael darstellt:
Ist $\mathfrak{A}$ ein projektiver Limes von G'Algebren, so ist $\mathfrak{A}$ eine G'-Algebra. Falls $\mathfrak{A}$ topologischer projektiver Limes von G-Algebren ist, so erweist sich auch $\mathfrak{A}$ als G-Algebra.

In jeder G'- Algebra, damit auch in jeder G-Algebra, gelten folgende Inklusionen:
$Sp(A + B) \subseteq Sp\ A + Sp\ B$, $Sp\ AB \subseteq Sp\ A \cdot Sp\ B$, $R(AB) \leq R(A)R(B)$,
dabei wird nicht vorausgesetzt, daß A mit B kommutiert.
In einer beliebigen Algebra gelten für zwei vertauschbare Elemente A und B die obigen Inklusionen für das Spektrum von Summe und Produkt der Elemente, falls mindestens eine maximale kommutative Teilalgebra $\mathfrak{A}_0$ von $\mathfrak{A}$, die A und B enthält, eine G'- Algebra ist. Dies folgt unmittelbar daraus, daß Sp C bezüglich $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}_0$ für jedes $C \in \mathfrak{A}_0$ übereinstimmen.
Jede solche Algebra ist insbesondere eine Algebra vom Typ R.
Jede Banachalgebra, allgemeiner jede vollständige, lokal m-konvexe Algebra, ist also vom Typ R. Ein Beispiel einer nicht notwendigerweise lokalkonvexen Algebra vom Typ R ist eine p - normierte Algebra. Jede kommutative p- normierte Algebra ist G-Algebra, W. Želažko (22 ,§4)

Aus $Sp\ (A + B) \subseteq Sp\ A + Sp\ B$ folgt die Gültigkeit des verallgemeinerten, spektralen Abbildungssatzes Th. 2.1 in beliebigen G'- Algebren ohne die dort gemachten Kommutativitätsvoraussetzungen.

Theorem 1. $\mathfrak{A}$ sei eine G-Algebra mit Einselement, $f_n \in \mathfrak{A}^{Sp\mathfrak{A}}$, A, $f_n(A) \in \mathfrak{A}$ und die Beziehung $f_n(A) - f_n(\lambda) = (A - \lambda)h_n(\lambda, A)$ (1) möge bestehen. Falls die Folge $f_n(A)$ gegen $S \in \mathfrak{A}$ konvergiert, so ist auch $f_n(\lambda)$ konvergent und es gilt der spektrale Abbildungssatz $\underline{Sp\ S = f(Sp\ A)}$, wobei $f(\lambda) := \lim_{n \to \infty} f_n(\lambda)$.

Beweis. Es sei $\lambda \in Sp\ A$, es existiert ein stetiger Homomorphismus g von $\mathfrak{A}$ in $\mathbb{C}$ mit $\lambda = g(A)$. Aus (1) folgt $g(f_n(A)) = f_n(g(A))$ (2). Aus der Stetigkeit von g folgt $g(f_n(A) - f_m(A)) \to 0$. (3) Wegen (2) und (3) ist für jedes $\lambda \in Sp\mathfrak{A}$ die Folge $f_n(\lambda)$ Cauchysch, also konvergent. Es gilt

$$g(f(\lambda) - S) = g(f(\lambda) - f_n(\lambda)) + g(f_n(\lambda) - f_n(A)) + g(f_n(A) - S).$$

Daraus folgt schließlich $g(f(\lambda) - S) = 0$ und damit $f(\lambda) \in Sp\ S$.

Sei $\mu \in Sp\ S$, wiederum existiert ein stetiger Homomorphismus g mit $g(\mu - S) = 0$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$: für alle $n \geq n_0(\varepsilon, g)$ $|g(S - f_n(A))| \leq \varepsilon$, somit $|g(\mu - f_n(A))| \leq \varepsilon$. Mit $\lambda := g(A)$ erhält man unter Berücksichtigung von (2) die Limesrelation $\mu = \lim_{n \to \infty} f_n(\lambda) = f(\lambda)$.

Bemerkung. Falls zwei Folgen $f_n^1(A)$ und $f_n^2(A)$ gegen S konvergieren, die beide die Beziehung (1) erfüllen, dann gilt $\lim_{n \to \infty} f_n^1(\lambda) = \lim_{n \to \infty} f_n^2(\lambda)$ für jeds $\lambda \in Sp\ A$, insofern ist die Definition $f(A) := S$ gerechtfertigt.

Ohne zusätzliche Voraussetzungen an $\mathfrak{A}$ kann man nicht schließen, daß die $f_n(\lambda)$ gleichmäßig konvergieren. $\mathfrak{A} := \mathbb{C}^{\mathbb{C}}$, versehen mit der Topologie der punktweisen Konvergenz ist G-Algebra, sei $A: z \to z$. Eine beliebige Folge $f_n(z)$, die punktweise, aber nicht gleichmäßig konvergiert, genügt den Anforderungen.

Korollar. Falls die $f_n(A)$ eine abelsche Familie bilden, genügt es vorauszusetzen, daß mindestens eine maximale, kommutative Teilalgebra $\mathfrak{A}_1$ von $\mathfrak{A}$, die alle $f_n(A)$ enthält, eine G-Algebra ist. Für Banachalgebren, allgemeiner für vollständige, lokal m - konvexe Algebren trifft dies zu.

Die Forderung (1) ist insbesondere für Polynome $f_n(A)$ erfüllt, ebenso für rationale Funktionen der Form $f_n(A) = \sum_{\nu=0}^{n} \eta_\nu (\lambda_\nu - A)^{-1}$, $\lambda_\nu \notin$ Sp A. Das obige Theorem 1 sichert die Gültigkeit des spektralen Abbildungssatzes für alle Elemente S der von I, A und allen $(\lambda - A)^{-1}$ erzeugten abgeschlossenen Teilalgebra von $\mathfrak{A}$. Insbesondere erhält man also den klassischen Abbildungssatz Sp $f(A)$ = f(Sp A), sofern $f(A) = \sum_{j} \alpha_j (\lambda - A)^{-1}$ existiert. I. Gelfand (3) bewies dieses Theorem für Banachalgebren und solche f, die in einer geeigneten Umgebung des Spektrums von A holomorph sind. Der von L. Waelbroeck (20) entwickelte Kalkül für mehrere komplexe Variable soll hier nicht untersucht werden. G. Neubauer (14) entwickelt den Funktionenkalkül und entsprechende spektrale Abbildungssätze in allgemeinen, folgenvollständigen lokalkonvexen Algebren.

4. Das Waelbroeckspektrum.

Ω sei die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{C}$, ω der adjungierte Punkt. Ω ist metrisierbar. Folgende Distanzfunktion erzeugt die Topologie.

$d(\lambda, \mu) := \frac{|\lambda - \mu|}{\sqrt{1+|\lambda|^2}\sqrt{1+|\mu|^2}}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, $d(\omega, \lambda) := \frac{1}{\sqrt{1+|\lambda|^2}}$, $\lambda \in \mathbb{C}$,

$d(\omega, \omega) := 0$.

Als kompakter, metrischer Raum ist (Ω, d) vollständig.

$\mathcal{A}$ sei eine topologische Algebra mit Einselement e, der zugrundeliegende Vektorraum $\mathcal{A}_0$ sei separiert und das Produkt zweier beschränkter Mengen sei stets beschränkt.

Definition: $\lambda_0 \in \mathbb{C}$ sei in $\beta_w(A)$, falls $(\lambda - A)^{-1}$ für alle λ einer geeigneten Umgebung U von λ_0 existiert und die Abbildung $\gamma : \lambda \to (\lambda - A)^{-1}$ von $U \to \mathcal{A}$ stetig ist.

$\omega \in \beta_w(A)$, falls $(\lambda - A)^{-1}$ für alle λ, $|\lambda| \geq \lambda_0$ existiert, φ stetig ist und zusätzlich $\lim_{|\lambda| \to \infty} \varphi(\lambda) = 0$ gilt. Die Festsetzung $\varphi(\omega) := 0$ ergibt eine stetige Abbildung einer geeigneten Umgebung U von ω in $\mathcal{A}$.

$\sigma_w(A) := \Omega \sim \beta_w(A)$

$R_w(A) := \sup_{\lambda \in \sigma_w(A)} |\lambda|$, $|\omega| := \infty$.

Proposition 1, L. Waelbroeck (20). $\lambda_0 \in \beta_w(A)$ genau dann, wenn für alle λ einer geeigneten Umgebung U von λ_0 die Inverse $(\lambda - A)^{-1}$ existiert und $\varphi(U)$ eine beschränkte Teilmenge von $\mathcal{A}$ ist.

Beweis: Ist $\varphi(U)$ beschränkt, so folgen die Stetigkeit von φ, bezw. die Limesrelation aus

$(\lambda - A)^{-1} - (\lambda' - A)^{-1} = (\lambda' - \lambda)(\lambda - A)^{-1}(\lambda' - A)^{-1}$.

$(\lambda - A)^{-1} = \frac{1 + A(\lambda - A)^{-1}}{\lambda}$

Ist φ stetig und $\lambda_0 \in \delta_w(A)$, so existiert eine kompakte Umgebung U von λ_0, sodaß für alle $\lambda \in U$ die Inverse $(\lambda - A)^{-1}$ existiert, $\varphi(U)$ ist als kompakte Teilmenge eines topologischen T_2 - Vektorraumes beschränkt in A.

Das Waelbroeckspektrum $\delta_w(A)$ ist stets eine kompakte Teilmenge von Ω, $\delta_w(A)$ ist genau dann eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$, wenn $R_w(A) < \infty$. L. Waelbroeck (20) nennt diese Elemente <u>regulär</u>, G. Neubauer (10) nennt sie <u>spektralbeschränkt</u>.

Die Inklusion $\overline{\text{Sp } A}^{\mathbb{C}} \subseteq \overline{\text{Sp } A}^{\Omega} \subseteq \delta_w(A)$ gilt immer, daraus folgt $R(A) = R_w(A)$.

Ist Sp A eine unbeschränkte Teilmenge von $\mathbb{C}$, so gilt $R(A) = R_w(A)$. Ist dagegen Sp A beschränkt, so kann man ohne zusätzliche Voraussetzungen an A keine weiteren Aussagen machen.

G. Neubauer (10, Bsp. 8.6) gibt ein Beispiel mit Sp A = $\emptyset$, $\delta_w(A) = \Omega$.

L. Waelbroeck(20): In einer quasivollständigen, lokalkonvexen, kommutativen Algebra mit e bilden die regulären Elemente eine Teilalgebra.

Es bestehen die Inklusionen $\delta_w(A + B) \subseteq \delta_w(A) + \delta_w(B)$, $\delta_w(AB) \subseteq \delta_w(A)\,\delta_w(B)$, A, B vertauschbare reguläre Elemente. Insbesondere gilt $R_w(AB) \leq R_w(A) R_w(B)$, falls A und B vertauschbare reguläre Elemente sind.

G. Neubauer (10, Th. 5. 15) bewies folgende Verallgemeinerung des obigen Theorems von Waelbroeck.

In einer folgenvollständigen, lokalkonvexen Algebra mit e gilt

für vertauschbare Elemente A, B, stets $R_w(AB) \leq R_w(A)R_w(B)$, dabei muß $\infty \cdot c = \infty$ gesetzt werden.

Zu Prop. 1. Nach G. Neubauer (10, 1.2 - 1.4) gelten in lokalkonvexen Algebren mit e folgende Sätze:

In A ist das Produkt zweier beschränkter Mengen genau dann beschränkt, wenn für jedes Paar von Nullfolgen $\{a_n\}, \{b_n\}$ die Folge $\{a_n b_n\}$ beschränkt ist.

Ist $\mathfrak{S}$ eine Familie von beschränkten Mengen, die alle Nullfolgen enthält und die Multiplikation in A $\mathfrak{S}$-hypostetig, dann ist in A das Produkt zweier beschränkter Mengen beschränkt.

In folgenvollständigen lokalkonvexen Algebren mit e ist das Produkt zweier beschränkter Mengen beschränkt.

Beispiel: Sei E ein lokalkonvexer Vektorraum und $\mathfrak{B}$ das System aller beschränkten Teilmengen von E, so ist in der lokalkonvexen Algebra $\mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(E)$ das Produkt zweier beschränkter Mengen beschränkt.

Beweis: Die Multiplikation ist $\mathfrak{B}$-hypostetig in $\mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(E)$, H. H. Schaefer (16, p. 202, ex. 40).

Anmerkung: $\mathcal{L}_{\mathfrak{B}}(E)$ braucht i. A. nicht folgenvollständig zu sein, ist es jedoch, falls E folgenvollständig und tonneliert ist.

Definition: Eine topologische Algebra heiße vom Typ R_w, falls für alle reguläre, vertauschbare Elemente A, B die Relation $R_w(AB) \leq R_w(A)R_w(B)$ gilt.

In diesem Abschnitt soll die Gültigkeit des spektralen Abbildungssatzes für das Waelbroeckspektrum untersucht werden. Das Ziel ist ein dem Theorem 2.1 analoger Abbildungssatz.

Die zu Beginn dieses Paragraphen gemachten Voraussetzungen an seien erfüllt.

Proposition 2. Sei $A \in \mathfrak{A}$ invertierbar, dann gilt $\sigma_w(A^{-1}) = (\sigma_w(A))^{-1}$, insbesondere gilt:
$0 \in \varrho_w(A)$ genau dann, wenn A^{-1} regulär ist.
$0 \in \varrho_w(A^{-1})$ genau dann, wenn A regulär ist.

Beweis: Die Aussagen folgen unmittelbar aus der Identität

$$(\tfrac{1}{\lambda} - A^{-1})^{-1} = -A - A^2(\lambda - A)^{-1}, \quad \lambda \in \mathbb{C}$$

und der Prop. 1.

Entsprechend zeigt man die Gültigkeit des spektralen Abbildungssatzes für $\varphi(\lambda) := \frac{1}{\lambda - \lambda_0}$.
Die folgende Proposition sichert den spektralen Abbildungssatz für Polynome. Aus den beiden Sätzen folgt dann auch die Gültigkeit für $f(\lambda) := \sum_{\nu=1}^{n} \frac{d_\nu}{\beta_\nu - \lambda}$, $\beta_\nu \notin \sigma_p A$

Proposition 3. Ist $f(\lambda)$ ein Polynom in λ, so gilt $f(\sigma_w(A)) = \sigma_w(f(A))$.

Beweis:
f sei ein Polynom k. Grades. Für jedes $\mu \in \mathbb{C}$ sei $g_\mu(\lambda) := \mu - f(\lambda)$.
Die nicht notwendigerweise verschiedenen μ Stellen von f seien $\lambda_{i,\mu}$, $i = 1,\dots,k$
Es gilt $g_\mu(\lambda) = (-1)^{k+1} \prod_{i=1}^{k} (\lambda_{i,\mu} - \lambda)$
Statt des spektralen Abbildungssatzes wird folgende gleichwertige Aussage bewiesen: $\mu \in \varrho_w(f(A))$ genau dann, wenn $\lambda_{i,\mu} \in \varrho_w(A)$, $i = 1,\dots,k$.
$\omega \in \varrho_w(f(A))$ genau dann, wenn $\omega \in \varrho_w(A)$.

Sei $\mu_o \in \mathbb{C}$, $\lambda_i, \mu_o \in \sigma_w(A)$ für alle i, $1 \leq i \leq k$. Zu den verschiedenen λ_i, μ_o existieren disjunkte Umgebungen U_i, so daß $A_i := \{ (\lambda - A)^{-1}, \lambda \in U_i \}$ beschränkt ist. Das Produkt der A_i ist voraussetzungsgemäß ebenfalls beschränkt.

Sei $U := \bigcap_{i=1}^{k} f(U_i)$. U ist eine Umgebung von μ_o, da f holomorph ist.

Aufgrund des spektralen Abbildungssatzes für Sp A und der Konstruktion von U existiert die Inverse $(\mu - f(A))^{-1}$ für jedes $\mu \in U$.

Die Menge $\{ (\mu - f(A))^{-1}, \mu \in U \}$ ist als Teil von $\prod_{i=1}^{k} A_i$ beschränkt.

Zu jedem $\lambda_o > 0$ existiert ein $K > 0$, sodaß $|\mu| \geq K$ stets $|\lambda_i \mu| \geq \lambda_o$ zur Folge hat. Es kann z. B. $K := (M_m + \lambda_o)^k$ gewählt werden, dabei ist λ_m eine betragsmäßig größte Nullstelle von f.

Sei $\omega \in \sigma_w(A)$, $A_o := \{ (\lambda - A)^{-1}, |\lambda| \geq \lambda_o \}$ $\mathcal{B} := \{ (\mu - f(A))^{-1}, |\mu| \geq K \}$ A_o, A_o^n und damit $\mathcal{B}$ sind beschränkt, also $\omega \in \sigma_w(f(A))$.

Für jedes $\lambda \in \mathbb{C}$ gilt $(f(\lambda) - f(A)) = (\lambda - A) g(\lambda, A)$. (1)

Sei $\mu_o \in \sigma_w(f(A))$, U eine beschränkte Umgebung von μ_o, die ganz in $\sigma_w(f(A))$ enthalten ist.

Für jedes $\lambda \in f^{-1}(U)$ gilt $(\lambda - A)^{-1} = g(\lambda, A) \cdot (f(\lambda) - f(A))^{-1}$, dies folgt aus (1).

Da die Mengen $\{ g(\lambda, A), \lambda \in f^{-1}(U) \}$ und $\{ (f(\lambda) - f(A), \lambda \in f^{-1}(U) \}$ beschränkt sind, ist auch $\{ (\lambda - A)^{-1}, \lambda \in f^{-1}(U) \}$ beschränkt, somit jedes $f^{-1}(\mu_o) \in \sigma_w(A)$.

Sei $\omega \in \sigma_w(f(A))$, $\mathcal{B}_o := \{ (\mu - f(A))^{-1}, |\mu| \geq \mu_o \}$ ist beschränkt, ebenso die Menge $\mathcal{B}_1 := \{ \mu (\mu - f(A))^{-1}, |\mu| \geq \mu_o \}$ - cf. Prop. 1 .

Bestimme $\lambda_0 : |\lambda| \geq \lambda_0 \; |\mu| := |f(\lambda)| \geq \mu_0$ zur Folge hat.

$\tilde{A} := \{(\lambda - A)^{-1}, |\lambda| \geq \lambda_0\}$ ist beschränkt, denn es gilt

$(\lambda - A)^{-1} = \mu(\mu - f(A))^{-1} \prod_{i=2}^{k} \frac{(\lambda_i \mu - A)}{\mu} \cdot (-1)^{k+1}$

dabei wurde $\lambda_1 \mu = \lambda$ gesetzt. $\{\frac{\lambda_i \mu}{\mu}, |\mu| \geq \mu_0\}$ ist beschränkt, somit auch $\{\frac{(\lambda_i \mu - A)}{\mu}\}$ und das Produkt derselben.

$\omega \in \varrho_w(A)$ ist damit gezeigt.

Lemma 4. A sei eine topologische Algebra vom Typ R_w, C, D seien vertauschbare Elemente mit regulärer Inverse, dann ist auch $(CD)^{-1}$ regulär.

Beweis: $R_w((CD)^{-1}) \leq R_w(D^{-1}) R_w(C^{-1}) < \infty$, somit $(CD)^{-1}$ regulär.

Lemma 5 A und B seien vertauschbare Elemente einer Algebra vom Typ R_w, A, B, regulär. Es gilt:

Zu jedem $\lambda \in \sigma_w(A)$ existiert ein $\mu \in \sigma_w(B)$ mit $|\lambda - \mu| \leq R_w(A - B)$.

Beweis:

Für $R_w(A - B) = \infty$ ist die Aussage trivial, sei also o.B.d.A. $R_w(A - B) < \infty$

Annahme: es gibt ein $\lambda_0 \in \sigma_w(A)$, sodaß für alle $\mu \in \sigma_w(B)$

$$R_w(A - B) < |\lambda_0 - \mu| \tag{1}$$

Aus (1) folgt $\lambda_0 \in \varrho_w(B)$, es existiert somit $F := (\lambda_0 - A)(\lambda_0 - B)^{-1} = (A - B)(\lambda_0 - B)^{-1}$ (2)

$(\lambda_0 - B)^{-1}$ ist regulär. Es gilt somit $R_w((\lambda_0 - B)^{-1}) = \max_{\lambda \in \sigma_w(\ldots)} |\lambda| = |\lambda_0|$

$= \frac{1}{|\mu_0 - z_0|}$, $z_0 \in \sigma_w(B)$, letzteres aufgrund von Prop. 2. (3)

Aus (2), (3) und (1) folgt $R_w(F) < 1$.

Aus $R_w(F) < 1$ folgt $o \in \varrho_{ww}(C)$, $C := (\lambda_o - A)(\lambda_o - B)^{-1}$, sei $D := (\lambda_o - B)$. Nach Lemma 4 ist $(\lambda_o - A)^{-1} = (CD)^{-1}$ regulär, nach Prop. 2 also $\lambda_o \in \varrho_w(A)$.
Das ist ein Widerspruch zur Annahme $\lambda_o \in \sigma_w(A)$.

Die in § 1 formulierten Propositionen 1. 1, 1.2 und 1.3 lassen eine wesentliche Verallgemeinerung zu. Es gilt Z. B.

Proposition 6. M sei eine beliebige Menge, Y ein metrischer Raum, $f_n \in Y^M$, Y_o, Y_n, $n \in \mathbb{N}$, Teilmengen von Y. Es gelte:
1) Die Folge f_n konvergiere gleichmäßig gegen f.
2) $\overline{f_n(M)} = \overline{Y_n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
3) Zu jedem $\eta = (\eta_n)$, $\eta_n \in Y_n$ existiere $v = (v_n)$, $v_n \in \overline{Y_o}$ mit $\lim_{n\to\infty} d(\eta_n, v_n) = o$
und zu jedem $\eta_o \in Y_c$ existiere ein $\eta_n \in \overline{Y_n}$: $\eta_o = \lim_{n\to\infty} \eta_n$,
dann gilt $\overline{Y_o} = \overline{f(M)}$.

Der Beweis verläuft analog zu demjenigen von 1.3. In der Tat, 1.3 ist ein Spezialfall von Prop. 6. Es sind lediglich folgende Ersetzungen vorzunehmen.
Sp A durch M, $\mathfrak{A}$ durch Y, Sp $f_n(A)$ durch Y_n, Sp S durch Y_o und schließlich die Distanz $d(\lambda, \mu) = |\lambda - \mu|$ durch die Metrik d in Y.

Theorem 7. $\mathfrak{A}$ sei eine topologische Algebra vom Typ R_w, $A \in \mathfrak{A}$. $f_n \in \mathfrak{A}^{\sigma_w(A)}$, $f_n(A)$ regulär. Folgende Voraussetzungen seien erfüllt.
1) Die Folge f_n konvergiere gleichmäßig gegen f.
2) $\overline{f_n(\sigma_w(A))} = \sigma_w(f_n(A))$ für alle $n \in \mathbb{N}$.
3) $S \in \mathfrak{A}$ sei ein reguläres Element, mit allen $f_n(A)$ vertauschbar und $\lim_{n\to\infty} R_w(S - f_n(A)) = o$ sei erfüllt.
Unter diesen Voraussetzungen gilt der spektrale Abbildungsatz

für das Waelbroeckspektrum von S, $\sigma_w(S) = f(\sigma_w(A))$.

Ganz analog übertragen sich die restlichen Aussagen von 2.1 .

Die gleichmäßige Konvergenz der f_n ist z. B. gesichert, wenn die $f_n(A)$ eine abelsche Familie bilden und der σ_w- spektrale Abbildungssatz auch für die Differenzen $f_n - f_m$ gilt. Für hinreichend vernünftige Funktionenklassen (Polynome, lokalholomorphe Funktionen) trifft dies zu.

Ist A regulär und f stetig, so besitzt S genau dann eine reguläre Inverse, wenn f auf $\sigma_w(A)$ nirgends verschwindet.

Beweis des Theorems 7. Der Satz folgt aus Prop. 6, indem dort $M := \sigma_w(A)$, $Y := \mathbb{C}$, $Y_n := \sigma_w(f_n(A))$, $Y_0 := \sigma_w(S)$ gesetzt wird. Zu zeigen ist nur noch, daß die Voraussetzung 3 gilt. Dies folgt jedoch aus Prop. 5, indem sie zunächst auf die Elemente $f_n(A)$, S, dann auf S, $f_m(A)$, angewendet wird.

Bemerkung: Aus der Proposition 5 folgt $|R_w(A) - R_w(B)| \leq R_w(A - B)$ für reguläre, vertauschbare Elemente A, B. Hieraus und aus der Voraussetzung 2 des Th. 7 folgt $R_w(f_n(A)) \leq K$. Die f_n sind somit gleichmäßig beschränkt. Zunächst hätte also nur die schwächere Forderung $f_n \subset \Omega^{\sigma(A)}$ gestellt werden müssen.

5. Das Waelbroeckspektrum in D - Algebren.

Proposition 1. In einer topologischen Algebra mit stetiger Inversion gilt $\overline{\mathrm{Sp}\ A}^{q} = \overline{\mathrm{Sp}\ A}^{\Omega} = \sigma_w(A)$ für alle regulären Elemente A, insbesondere $R_w(A) = R(A)$.

Korollar. In Banachalgebren, bezw. allgemeiner in lokalkonvexen Algebren mit stetigen Inversen, gilt $\mathrm{Sp}\ A = \sigma_w(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$.

Proposition 2. In topologischen Algebren mit stetiger Resolvente gilt $\overline{\mathrm{Sp}\ A}^{\Omega} = \sigma_w(A)$ für jedes $A \in \mathcal{A}$.

Eine topologische Algebra mit e heißt dabei Algebra mit stetiger Resolvente, falls für jedes $A \in \mathcal{A}$ die Abbildung $\varphi : \lambda \to (\lambda - A)^{-1}$ von $\mathfrak{D} \to \mathcal{A}$ stetig ist und $\lim_{|\lambda| \to \infty} \varphi(\lambda) = 0$, $\mathfrak{D}$ ist dabei der Definitionsbereich von $R_\lambda = (\lambda - A)^{-1}$. G. Neubauer (10, § 7)

Die Beweise von Prop. 1, des Kor. und Prop. 2 sind einfach, sie sollen hier nicht gebracht werden.

Die Proposition 2 gibt zu folgender Definition Anlaß:

Definition : Eine topologische Algebra mit e heiße D - Algebra, falls für alle $A \in \mathcal{A}$ $\overline{\mathrm{Sp}\ A}^{\Omega} = \sigma_w(A)$ gilt.

Beispiel: Die folgenvollständigen, lokal m - konvexen Algebren mit e sind Algebren mit stetiger Resolvente, somit D - Algebren.

Proposition 3. $\mathfrak{A}$ sei eine D - Algebra vom Typ R, A, B, vertauschbar, dann gibt es zu jedem $\lambda \in \sigma_w(A)$ ein $\mu \in \sigma_w(B)$ mit $d(\lambda, \mu) \leq R_w(A - B)$.

Beweis: Zu jedem $\lambda \in \sigma_w(A) = \overline{\text{Sp } A}^{\Omega}$ existiert ein $\lambda_n \in \text{Sp } A$ mit $d(\lambda, \lambda_n) \leq \frac{1}{n}$. Zu diesem λ_n existiert nach 2.0 ein $\mu_n \in \overline{\text{Sp } B}^{\Omega} \subseteq \overline{\text{Sp } B}^{\Omega}$ $= \sigma_w(B)$ mit $d(\lambda_n, \mu_n) \leq |\lambda_n - \mu_n| \leq R(A - B)$.

Daraus folgt $d(\lambda, \mu_n) \leq R(A - B) + \frac{1}{n}$. (1)

Da Ω ein kompakter, metrischer Raum ist, besitzt die Folge $\{\mu_n\}$ eine konvergente Teilfolge mit Limes $\mu \in \sigma_w(B)$.

Aus (1) folgt $d(\lambda, \mu) \leq R(A - B) = R_w(A - B)$.

Aus der obigen Proposition und 4.6 läßt sich folgendes Theorem herleiten.

Theorem 4. Gegeben sei eine D - Algebra vom Typ R, $f_n \in \Omega^{\sigma_w(A)}$, $f_n(A) \in \mathfrak{A}$. Vorausgesetzt wird:

1) $\{f_n\}$ konvergiert chordal gleichmäßig gegen f.

2) $\sigma_w(f_n(A)) = \overline{f_n(\sigma_w(A))}^{\Omega}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

3) Es existiert ein $S \in \mathfrak{A}$, mit allen $f_n(A)$ vertauschbar, welches $\lim_{n \to \infty} R_w(S - f_n(A)) = 0$ erfüllt.

In diesem Falle gilt der spektrale Abbildungssatz $\sigma_w(S) = \overline{f(\sigma_w(A))}^{\Omega}$.

Beweis: Setze in Prop. 4.6 $M := \sigma_w(A)$, $Y := \Omega$, $Y_n := \sigma_w(f_n(A))$, $Y_0 := \sigma_w(S)$.

Die dortigen Voraussetzungen 1, 2 entsprechen den Forderungen 1 und 2 des obigen Theorems. die 3. Voraussetzung ist erfüllt, wie unmittelbar aus Prop. 3 zu entnehmen ist. Sie wird auf die Elemente $f_n(A)$, S und S, $f_n(A)$ angewendet.

In D - Algebren gilt für alle A $R(A) = R_w(A)$, daher kann im obigen Theorem stets R_w durch R ersetzt werden.
Die übrigen Aussagen des Th. 2.1 gelten ebenso, z. B.
Bilden die $f_n(A)$ eine abelsche Familie und gilt der σ_w- spektrale Abbildungssatz auch für die Differenzen $f_\nu - f_\mu$, dann konvergieren die f_n gleichmäßig chordal gegen f.
Ist f auf $\sigma_w(A)$ chordal-stetig, so besitzt S genau dann eine reguläre Inverse, wenn f auf $\sigma_w(A)$ nirgends den Wert o annimmt.

Schließlich soll ein Zusammenhang zwischen D - und G - Algebren hergestellt werden.

Theorem 5. $\mathfrak{A}$ sei sowohl D- als auch G- Algebra, A , $f_n(A) \in \mathfrak{A}$, $f_n \in \mathfrak{C}^{Sp A}$, Sp A eine beschränkte Teilmenge von $\mathfrak{C}$.
Es gelte $f_n(A) - f_n(\lambda) = (A - \lambda) h_n(\lambda, A)$.
Falls die Folge $f_n(A)$ gegen S in $\mathfrak{A}$ konvergiert und die nach 3.1 existierende Grenzfunktion f auf $\overline{Sp\ A}$ stetig ist, dann gilt
$\sigma_w(S) = f(\sigma_w(A))$.

Beweis: Es gilt $Sp\ S = f(Sp\ A)$ nach 3.1 . Hieraus folgt
$\sigma_w(S) = \overline{Sp\ S}^{\wedge} = \overline{Sp\ S}^{\mathfrak{A}} = \overline{f(Sp\ A)}^{\mathfrak{C}} = f(\overline{Sp\ A}^{\mathfrak{A}}) = f_{\sigma_w}(A)$

Das obige Theorem $\sigma_w(S) = f(\sigma_w(A))$ gilt auch für unbeschränktes Sp A, sofern die chordale Stetigkeit von f auf $\sigma_w(A)$ gefordert wird.

6 Anwendungen des spektralen Abbildungssatzes.

Für die Begriffsbildungen: Folgenraum, λ-Dual, bezw. β - Dual und Eigenschaften dieser Räume sei auf G. Köthe (7 , § 30) verwiesen.

$\mathfrak{A}$ sei eine folgenvollständige, lokalkonvexe Gelfandalgebra, Λ ein Folgenraum und $\Lambda^\times$ sein λ- Dual.

$\{p_\lambda, \lambda \in L\}$ sei ein System von Halbnormen, das die Topologie von $\mathfrak{A}_0$ erzeugt.

Theorem 1. Es sei $A \in \mathfrak{A}$, $\gamma = (\gamma_\nu) \in \Lambda$. Für jedes $\lambda \in L$ sei $\delta_\lambda := \{p_\lambda(A^\nu)\} \in l^1$. Unter diesen Voraussetzungen konvergiert die Folge $S_n := \sum_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu A^\nu$ gegen ein $S \in \mathfrak{A}$, und es gilt der spektrale Abbildungssatz $Sp\ S = f(Sp\ A)$, wobei $f(\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \gamma_\nu \lambda^\nu$

Beweis: Zu zeigen ist lediglich, daß $\{S_n\}$ eine Cauchyfolge ist. Die vorausgesetzte Folgenvollständigkeit garantiert die Konvergenz gegen ein $S \in \mathfrak{A}$. Die Gültigkeit des spektralen Abbildungssatzes folgt dann aus Th. 3.1 .
Definitionsgemäß liegt für jedes $\lambda \in L$ das Element $(\gamma \cdot \delta_\lambda) = \{(\gamma_\nu p_\lambda(A^\nu))\}$ in l^1 , zu jedem $\varepsilon > 0$ existiert somit ein $n(\varepsilon, \lambda)$, sodaß für alle $m \geq n(\varepsilon, \lambda)$ und alle $k \in \mathbb{N}$ $p_\lambda(S_{m+k} - S_m) = p_\lambda(\sum_{\nu=m+1}^{m+k} \gamma^\nu A^\nu) \leq \sum_{\nu=m+1}^{m+k} |\gamma_\nu| p_\lambda(A^\nu) < \varepsilon$
q.e.d.

Korollar: $\mathfrak{A}$ sei eine Banachalgebra, $A \in \mathfrak{A}$, $(\gamma_\nu) \in \Lambda$, $(\|A^\nu\|) \in \Lambda^\times$, dann konvergiert die Folge der S_n gegen ein $S \in \mathfrak{A}$, und es gilt der spektrale Abbildungssatz $Sp\ S = f(Sp\ A)$.

Das obige Korollar besitzt eine Verallgemeinerung auf beliebige p-normierte Algebren, die im Allgemeinen nicht lokalkonvex sind.

Theorem 2. $\mathcal{A}$ sei eine p- normierte Algebra, $(\gamma_\nu^\rho) \in \Lambda$, $(\|A^\nu\|) \in \Lambda^\times$, $S_n := \sum_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu A^\nu$, dann konvergiert die Folge der S_n gegen ein $S \in \mathcal{A}$, es gilt $Sp\ S = f(Sp\ A)$.

Beweis: Mit $\mathcal{A}$ ist auch jede maximale kommutative Teilalgebra von $\mathcal{A}$ vollständig. Jede kommutative p-normierte Algebra ist G - Algebra (22, Th. 7). Es genügt somit zu zeigen, daß die S_n eine Cauchyfolge in $\mathcal{A}_1$ bilden. Dabei ist $\mathcal{A}_1$ eine maximale kommutative Teilalgebra von $\mathcal{A}$, die A enthält. Der spektrale Abbildungssatz folgt dann aus Th. 3.1, wobei zu berücksichtigen ist, daß $Sp_{\mathcal{A}_1} B = Sp_{\mathcal{A}} B$ für alle $B \in \mathcal{A}_1$.

Definitionsgemäß gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n(\varepsilon)$, sodaß für alle $m \geq n(\varepsilon)$ und alle $k \in N$ $\sum_{\nu=m+1}^{m+k} |\gamma_\nu|^\rho \|A^\nu\| \leq \varepsilon$

Somit $\|(S_{m+k} - S_m)\| \leq \varepsilon$.

Sowohl in Th. 1 als auch in Th. 2 können Λ und $\Lambda^\times$ vertauscht werden. Dies folgt unmittelbar aus dem Beweisgang dieser Theoreme.

Die Konvergenz ist also z. B. gesichert, falls in Th. 1 $\gamma \in \Lambda$, bezw. $\sigma_\lambda \in \Lambda^\times$ wie folgt gewählt wird:

1) $\gamma \in \ell^1$, $\sigma_\lambda \in \ell^\infty$

2) $\gamma \in \ell^p$, $\sigma_\lambda \in \ell^q$, $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

3) $\gamma = (\gamma_n)$, $\sigma_\lambda = (\sigma_{n,\lambda})$ mit $\gamma_n = O(n^{r_0})$, $(\sigma_{n,\lambda} \cdot n^{r_0}) \in \ell^1$, $r_0 > 0$

Entsprechende Aussagen gelten für p-normierte Algebren, falls $\gamma = (\gamma_\nu^\rho)$ gesetzt wird.

Theorem 3. $\mathcal{A}$ sei eine Algebra, M eine mindestens zweielementige Teilmenge von N. Für ein $A \in \mathcal{A}$ mit $R(A) = 1$ und $1 \in \mathrm{Sp}\, A$ möge $S := \sum_{\nu \in M} a_\nu A^\nu$ existieren, und es gelte $\mathrm{Sp}\, S = f(\mathrm{Sp}\, A)$, wobei $f(\lambda) := \sum_{\nu \in M} a_\nu \lambda^\nu$, es seien alle $a_\nu > 0$.
Das periphere Spektrum von S ist genau dann f - Bild des peripheren Spektrums von A, wenn für alle $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$ mit $|\lambda| = 1$ die Beziehung $\lambda^d = 1$ erfüllt ist, dabei ist $d := \mathrm{ggT}\{\nu - \mu),\ \mu < \nu,\ \mu, \nu \in M\}$.

Aus $\mathrm{Sp}\, S = f(\mathrm{Sp}\, A)$ folgt insbesondere die Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu \in M} a_\nu$. Da alle $a_\nu > 0$ sind, konvergiert sie unbedingt. Daher darf angenommen werden, daß die zu einem festen Exponenten ν gehörigen a_ν bereits zusammengefaßt sind.

Beweis:

Lemma: Aus $0 < a$ und $1 + a \leq |\lambda + a|$, $|\lambda| \leq 1$ folgt $\lambda = |\lambda| = 1$.

Der Beweis des Lemmas ist klar.

Aus dem spektralen Abbildungssatz folgt $|\eta| \leq \sum_{\nu \in M} a_\nu$ für jedes $\eta \in \mathrm{Sp}\, S$.
Das periphere Spektrum von S besteht somit aus denjenigen $f(\lambda)$, $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$, mit $|f(\lambda)| = \sum_{\nu \in M} a_\nu$.
Sei $f(\lambda) \in \mathrm{per}.\ \mathrm{Sp}\, S$, $(\nu, \nu') \in M \times M$, $M_1 := M \sim \{\nu, \nu'\}$. Es gilt

$$a_\nu + a_{\nu'} \leq a_\nu + a_{\nu'} + \sum_{\beta \in M_1} a_\beta = \sum_{\beta \in M} a_\beta = |f(\lambda)| \leq \left| \sum_{\beta \in M_1} a_\beta \lambda^\beta \right| + |a_\nu \lambda^\nu + a_{\nu'} \lambda^{\nu'}|$$

Somit $a_\nu + a_{\nu'} \leq |a_\nu \lambda^\nu + a_{\nu'} \lambda^{\nu'}|$.

Für $\nu < \nu'$ folgt hieraus wegen $|\lambda| \leq 1$ und $a_\nu > 0$, $a_{\nu'} > 0$

$$1 + \frac{a_\nu}{a_{\nu'}} = \left| \lambda^{\nu' - \nu} + \frac{a_\nu}{a_{\nu'}} \right|.$$

Das obige Lemma hat $\lambda^{\nu' - \nu} = 1$ zur Folge, somit gilt auch $\lambda^d = 1$, wobei d der oben angegebene größte gemeinsame Teiler ist.

Ist $\lambda^d = 1$, dann gilt $\lambda^{\nu} = \lambda^{\nu_0}$ für alle $\nu \in M$, $\nu_0 \in M$ beliebig gewählt. Daraus folgt $f(\lambda) = \lambda^{\nu_0} \sum_{\nu \in M} d_\nu$ und somit $|f(\lambda)| = \sum_{\nu \in M} d_\nu$.

Falls M zweielementig ist, muß natürlich $d := \nu - \mu$ gesetzt werden.

Für endliches M gilt das obige Theorem in jeder Algebra, da der spektrale Abbildungssatz für Polynome in jeder Algebra gilt.

Für unendliches M erhält man z. B. folgendes Korollar:

Korollar: $\mathfrak{A}$ sei eine Gelfandalgebra, φ eine strikt monotone Abbildung von N in N, $A \in \mathfrak{A}$, $R(A) = 1$, $1 \in \mathrm{Sp}\, A$. $S_n := \sum_{\nu=1}^{n} d_\nu A^{\varphi(\nu)}$, $d_\nu > 0$ möge gegen $S \in \mathfrak{A}$ konvergieren.

Nach Th. 3. 1 existiert dann $f(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{\infty} d_\nu \lambda^{\varphi(\nu)}$ für jedes $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$, es gilt $\mathrm{Sp}\, S = f(\mathrm{Sp}\, A)$.

per. Sp S = f(per. Sp A) gilt genau dann, wenn für jedes λ, $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$, $|\lambda| = 1$ die Beziehung $\lambda^d = 1$ gilt, wobei $d := \gcd_{\nu} \{ \varphi(\nu+1) - \varphi(\nu) \}$.

Für geordnete Banachalgebren erhält man folgendes Theorem.

Theorem 4. $\mathfrak{A}$ sei eine geordnete Banachalgebra mit Einselement und normalem Kegel, $A \geq 0$ und $R(A) = 1$, d, S_n wie oben definiert. Falls die Folge $\{S_n\}$ $\sigma(\mathfrak{A}, \mathfrak{A}')$ gegen S konvergiert, dann gilt der spektrale Abbildungssatz $\mathrm{Sp}\, S = f(\mathrm{Sp}\, A)$. Das periphere Spektrum von S ist genau dann f - Bild des peripheren Spektrums von A, wenn $\lambda^d = 1$ für jedes $\lambda \in$ per. Sp A.

Beweis: Zu zeigen ist, daß $1 \in \mathrm{Sp}\, A$ und die Normkonvergenz der S_n gegen S.

H. H. Schaefer (13) bewies folgende Theoreme, die $1 \in \mathrm{Sp}\, A$, bezw. die Normkonvergenz sichern.

Theorem. (13, 7.2) Sei $E(\tau)$ lokalkonvex und halbgeordnet durch einen normalen Kegel K. Sei H eine gerichtete Teilmenge von E, für die der Filter $\mathcal{F}(H)$ der Enden von H schwach konvergiert, dann konvergiert $\mathcal{F}(H)$ für τ.

Korollar: In einem halbgeordneten lokalkonvexen Raum, dessen positiver Kegel normal ist, ist jede quasi-monotone und schwach konvergente Folge konvergent.

Theorem (13, 11.1). $\mathfrak{A}$ sei eine Banachalgebra mit Einselement, $\mathfrak{K}$ ein normaler Kegel in $\mathfrak{A}$. Für jedes $A \in \mathfrak{K}$ ist der Spektralradius $R(A) = \lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$ ein Element des Spektrums von A.

Sowohl die Voraussetzung $1 \in \mathrm{Sp}\, A$, als auch die Annahme, daß alle $\lambda_\nu > 0$ sind, ist für das Bestehen des Theorems 3 wesentlich. Dies soll an zwei Beispielen aus der Algebra der 2×2 Matrizen über $\mathbb{C}$ gezeigt werden.

1) $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B := A^2 + A$. Das Spektrum beider Operatoren ist peripher, hier ist $d = 1$, $\lambda^2 = -1$ für $\lambda \in \mathrm{Sp}\, A$.

2) $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $B := A - A^2$, per Sp $B = \{\frac{1}{4}\}$, $\frac{1}{4}$ ist jedoch Bild des Punktes $\frac{1}{2} \notin \mathrm{Sp}\, A$; in diesem Beispiel ist ebenfalls $d = 1$.

Der spektrale Abbildungssatz für das Punkt- und das approximative Punktspektrum.

Proposition 1. E sei ein Banachraum, $\mathcal{L}_\beta(E)$ die Banachalgebra der stetigen, linearen Operatoren von E in E, T, $f_n(T) \in \mathcal{L}_\beta(E)$. Die Folge $f_n(T)$ möge bezüglich der schwachen Operatortopologie gegen S konvergieren.

Falls für ein $x \in E$ $f_n(T)x = f_n(\lambda)x$ für alle $n \in N$ gilt, dann konvergiert die Folge $f_n(\lambda)$, und es ist $Sx = f(\lambda)x$, wobei $f(\lambda) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda)$.

Beweis. Die Folge $f_n(T)x$ ist $\sigma(E, E')$ Cauchysch. Zu x wird ein $g \in E'$ gewählt, sodaß $\langle x, g\rangle = 1$. Aus $(f_n(\lambda) - f_m(\lambda))x = f_n(T)x - f_m(T)x$ folgt

$|f_n(\lambda) - f_m(\lambda)| = |\langle (f_n(\lambda) - f_m(\lambda))x, g\rangle| = |\langle f_n(T)x - f_m(T)x, g\rangle| \to$

$\{f_n(\lambda)\}$ ist also eine Cauchyfolge, somit konvergent.

Für beliebiges $g \in E'$ gilt

$|\langle (f(\lambda) - S)x, g\rangle| \leq |f_n(\lambda) - f(\lambda)|\,\|x\|\,\|g\| + |\langle f_n(T)x - Sx, g\rangle|$, (1)

dabei wurde $f_n(T)x = f_n(\lambda)x$ berücksichtigt. Beide Terme der rechten Seite von (1) konvergieren gegen o, somit ist $\langle f(\lambda)x - Sx, g$

für jedes $g \in E'$. Da E' auf E Punkte trennt, gilt also auch $Sx = f(\lambda)$

Aus der obigen Proposition folgt unmittelbar folgendes Korollar. Ist $f(\lambda)$ in einer Umgebung U des Spektrums von T holomorph und $\lambda_0 \in P_\sigma(T)$, dann ist auch $f(\lambda_0) \in P_\sigma(f(T))$.

Allgemeiner gilt:

Es sei $\lambda_0 \in P_\sigma(T)$, $f_n(\lambda)$ in Umgebung U_n von Sp T holomorph und die Folge $f_n(T)$ im Sinne der schwachen Operatortopologie gegen S konvergent, dann existiert $f(\lambda_0) = \lim_{n\to\infty} f_n(\lambda_0)$, und es gilt $Sx = f(\lambda_0)x$, wobei x der Eigenvektor zum Eigenwert λ_0 von T ist.

Selbst dann, wenn die Folge $f_n(T)$ normkonvergiert, kann man im Allgemeinen nicht schließen, daß jedes Element aus dem Punktspektrum von S Bild eines geeigneten Elementes aus $P_\delta(T)$ ist. Hierzu folgendes Beispiel:

E := C[0,1] , C[0,1] , $A \in \mathfrak{L}(E)$ quasinilpotent, $0 \in P_\delta(A)$ - etwa der Volterra - Integrationsoperator $A : f \to g$, $g(s) := \int_0^s f(t)dt$ - $T := \frac{1}{\alpha} I + A$. Da $R(T) < 1$, konvergiert die Folge T^n gegen o. Das Punktspektrum von T ist leer, $Sp\ o = P_\delta(o) = \{o\}$.

Proposition 2. Seien $T, f_n(T) \in \mathfrak{L}(E)$, die Folge $f_n(T)$ gegen S normkonvergent und für ein vorgegebenes λ konvergiere $f_n(\lambda)$ gegen $f(\lambda)$. Falls eine Folge x_m, $\|x_m\| = 1$, existiert, sodaß für jedes $n \in \mathbb{N}$ $\lim_{m \to \infty} \|(f_n(\lambda) - f_n(T))x_m\| = o$, dann liegt $f(\lambda)$ im approximativen Punktspektrum von S.

Beweis: Zu vorgegebenem $\varepsilon > 0$ existiert zunächst ein $n_0(\varepsilon)$: für alle $n \geq n_0(\varepsilon)$ $\|S - f_n(T)\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, ebenso existiert $n_1(\varepsilon)$: $|f(\lambda) - f_n(\lambda)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$ für alle $n \geq n_1$, sei $n_2(\varepsilon) := \max(n_0, n_1)$. Nach Voraussetzung existiert zu diesem $n_2(\varepsilon)$ ein $\beta(n_2(\varepsilon), \varepsilon) = \beta(\varepsilon)$: für alle $m \geq \beta(\varepsilon)$ $\|(f_{n_2}(T) - f_{n_2}(\lambda))x_m\| \leq \frac{\varepsilon}{3}$, damit erhält man

$$\|(S - f(\lambda))x_m\| \leq \|(S - f_{n_2}(T))x_m\| + \|(f_{n_2}(T) - f_{n_2}(\lambda))x_m\| + \|(f_{n_2}(\lambda) - f(\lambda))x_m\|$$
$$\|S - f_{n_2}(T)\| + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \leq \varepsilon$$

Proposition 3. λ sei im approximativen Punktspektrum von T, $f_0(T)$ ein Element der von I, T und allen $R_\lambda(T) := (\lambda - T)^{-1}$ erzeugten normabgeschlossenen Teilalgebra von $\mathfrak{L}(E)$, dann ist $f_0(\lambda)$ im approximativen Punktspektrum von $f_0(T)$.

Beweis: Sei $\lambda_0 \in \sigma_l(T)$, dann existiert eine Folge x_n, $\|x_n\| = 1$: $\|(\lambda_0 - T)x_n\| \to 0$. Für jedes $f(\lambda) := \sum_{\nu=1}^{n} \frac{\alpha_\nu}{\lambda - \beta_\nu}$ gilt $\|(f(\lambda_0) - f(T))x_n\| \to 0$, dies ist durch eine elementare Rechnung leicht einzusehen. Jedes Element $f(T)$ der von I, T und allen $R_\lambda(T)$ erzeugten abgeschlossenen Teilalgebra von $\mathfrak{L}(E)$ ist Limes einer Folge $f_n(T)$, wobei $f_n(T) = \sum_{\nu=1}^{n} \eta_\nu R_{\beta_\nu}(T)$. Die Folge $f_n(\lambda)$ konvergiert, da der spektrale Abbildungssatz auf die Differenzen $f_n - f_m$ anwendbar ist und $\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}}$ $R(f_n(T) - f_m(T)) = 0$ erfüllt ist.

Die Voraussetzungen der Prop. 2 sind demnach erfüllt.

Prop. 3 ist eine leichte Verallgemeinerung einer bei N. Dunford - J. T. Schwartz (2, ex. 13, p. 599) gestellten Übungsaufgabe, da insbesondere jedes $f(T)$, f in einer geeigneten Umgebung U von Sp T holomorph, der von I, T und den $R_\lambda(T)$ erzeugten abgeschlossenen Algebra angehört.

An einem Beispiel soll nun gezeigt werden, daß Prop 3 nicht zutrifft, falls nur vorausgesetzt wird, daß die Folge $f_n(T)$ im Sinne der starken Operatortopologie gegen S konvergiert. Ebenso trifft der spektrale Abbildungssatz auch auf das Gesamtspektrum unter dieser abgeschwächten Voraussetzung nicht mehr zu.

Beispiel: $E := E_1 + iE_1$, $E_1 := L_2(0,1)$, μ das Lebesgue - Maß auf $[0,1]$, V sei der Volterra - Operator $Vf(\lambda) := \int_0^\lambda f(t)\,d\mu(t)$, $T := (I - V)^{-1}$ es ist $\|T\| = 1$, P. R. Halmos (4, ex.150), Sp T = $\{1\}$. T ist als Kontraktion eines reflexiven Banachraumes stark ergodisch, N. Dunford - J. T. Schwartz (2 , Cor. 4, p. 662). Die Mittel $M_n := \frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1} T^m$ konvergieren gegen die 0-Projektion, da $P_0(T) = \emptyset$.

Anwendung des spektralen Abbildungssatzes auf die Funktionen $f_n(\lambda) = \frac{1}{n}\sum_{\nu=0}^{n-1}\lambda^\nu$ ergibt $\mathrm{Sp}\, W_n = \{a\}$ mit $|a| = 1$, aber $f(1) = \lim f_n(1) = 1 \notin P_\delta(0)$.

Im obigen Beispiel konvergiert die Folge der in der ganzen komplexen Ebene $\mathbb{C}$ analytischen Funktionen f_n gleichmäßig auf dem Spektrum von T. Die etwas schärfere Voraussetzung der gleichmäßigen Konvergenz einer Folge von Funktionen, die in einer vorgegebenen Umgebung U von Sp T holomorph sind, in ganz U hat nach dem Satz von Weierstrass die Holomorphie der Grenzfunktion f im Innern von U zur Folge. Die Operatoren $f_n(T)$ konvergieren bezügl. der Norm gegen $f(T)$, N. Dunford - J. T. Schwartz (, Lemma 7, p. 571). Insbesondere gilt für f der spektrale Abbildungssatz , der hier bereits in seiner klassischen Form (2 , Th. 11, p.569) anwendbar ist.

Literatur.

1) N. Bourbaki, Espaces vectoriels topologiques, 2 Bde, Act. Sci et Ind. No. 1189, 1229, Paris 1953, resp. 1955.

2) N. Dunford - J. T. Schwartz, Linear Operators I, New York, 1958.

3) I. Gelfand, Normierte Algebren, Mat. Sbornik, 9 (51), S. 3 - 24, 1941.

4) P. R. Halmos, A hilbert space problem book, Princeton 1967.

5) E. Hille - R. S. Phillips, Functional analysis and semigroups, A.M.S. Coll, Publ. 31, 1957.

6) J. Kaplansky, Topological rings, Bull. A.M.S., Vol. 45, p. 809 - 826, 1948.

7) G. Köthe, Topologische Lineare Räume I, Berlin - Göttingen - Heidelberg, 1960

8) H. Lotz, Über das Spektrum positiver Operatoren, Diss. Tübingen, 1968.

9) E. A. Michael, Locally m - convex algebras, Mem. A.M.S., no. 11, 1952.

10) G. Neubauer, Zur Spektraltheorie in lokalkonvexen Algebren, Math. Ann. 142, S. 131 - 164, 1961.

11) G. Neubauer, Einige Bemerkungen zur Theorie maximaler Ideale, Math. Z., Bd. 77, S. 285 - 294, 1961.

12) M. A. Neumark, Normierte Algebren, Berlin 1959.

13) H. H. Schaefer, Halbgeordnete lokalkonvexe Vektorräume I - III, Math. Ann. Bde. 135, 138, 141, insbes II, Bd. 138, 259 - 286, 1959.

14) H. H. Schaefer, Spectral measures in locally convex algebras, Acta Math. Bd. 107, p. 125 - 173, 1962.

15) H. H. Schaefer, Convex cones and spectral theory, Proc. Symp. Pure Math., Vol VII, Convexity, p. 451 - 471, Providence, R. I., 1963.

16) H. H. Schaefer, Topological vector spaces, New York, 1966.

17) A. E. Taylor, Introduction to functional analysis, New York, 3rd ed., 1963.

18) A. E. Taylor - C. J. A. Halberg Jr., General theorems about a bounded linear operator and its conjugate, J. Reine u. Angew. Math. Bd. 198, p. 93 - 111, 1957.

19) L. Waelbroeck, Les algèbres à inverse continu, C. R. Acad. Sci., Vol. 238, p. 640, 1954.

20) L. Waelbroeck, Le calcul symbolique dans les algebres commutatives, J. Math. pures et appl. Vol 33, p. 147 - 186, 1954.

21) M. Wolff, Über das Spektrum von Homomorphismen in Banachverbänden, Diss. Tübingen, 1968.

22) W. Zelazko, On the locally bounded and m-convex topological algebras, Stud. Math. 19, p. 333 - 356, 1960.

23) A. Guichardet, Special topics in topological algebras, New York, 1968.

Nachtrag:

Definition: Eine topologische Algebra heiße F - Algebra, falls der zugrunde liegende Vektorraum ein F - Raum ist, dh. eine translationsinvariante Metrik existiert, bezügl. der er vollständig ist. Lokalkonvexität wird nicht vorausgesetzt.

Eine F - Algebra heiße p - normiert, falls eine äquivalente, submultiplikative, p - homogene Norm existiert, d. h. eine Funktion $\| \ \|$ von $\mathcal{A}$ in $\mathbb{R}_+$ mit:

1) $\mathcal{A}$ ist ein F - Raum mit $\beta(A, B) := \| A - B \|$ und β ist zur ursprünglichen Metrik äquivalent.

2) $\| AB \| \leq \| A \| \| B \|$ für alle $A, B \in \mathcal{A}$.

3) $\| \lambda A \| = |\lambda^p| \| A \|$ für alle $A \in \mathcal{A}$ und alle $\lambda \in \mathbb{C}$

p - normierte Algebren werden ausführlich bei W. Zelacko ( ) behandelt.

Lebenslauf.

Am 4. 1. 1939 wurde ich, Konrad Paul Schellenberg, als Sohn des Textiltechnikers Walter Schellenberg und seiner Frau Annemarie, geb. Naegele, in Konstanz geboren.

Nach dem Besuch der Volksschule in Allensbach, des Humboldtgymnasiums in Konstanz, später der dortigen Höheren Handelsschule und schließlich der Wirtschaftsoberschule an diesem Ort, bestand ich die Reifeprüfung im Frühjahr 1960.

Vom Sommersemester 1960 bis Sommer 1966 studierte ich an der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen Mathematik und Physik. Im Dezember 1963 bestand ich die Diplom - Vorprüfung in Mathematik und im Juli 1966 die Diplomprüfung ebenfalls in Mathematik.

Vom 1. 9. 1966 bis 31. 7. 1969 arbeitete ich am Mathematischen Institut der Universität Tübingen als wissenschaftliche Hilfskraft. In dieser Zeit arbeitete ich bei Herrn Professor H. H. Schaefer an meiner Dissertation mit dem Thema: " Eine Verallgemeinerung des spektralen Abbildungssatzes in topologischen Algebren ".

Meine akademischen Lehrer waren die Herren Professoren: H. Ehlich, B. Huppert, H. Kneser, H. W. Leopoldt, M. Müller, G. Pickert, H. H. Schaefer, V. Vogel, H. Wielandt und K. Zeller im Mathematik, sowie W. Braunbek, H. Krüger, G. Möllenstedt und R. Mühleisen in Physik.

Druck: Polyfoto Dr. Vogt KG
Stuttgart 1, Königstraße 19 a
Telefon 291063

Druck: Polyfoto Dr. Vogt KG
Stuttgart 1, Königstraße 19 a
Telefon 291063